МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по УР
М. Х. Чанкаев
«30» апреля 2025 г., протокол № 8

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

(наименование дисциплины (модуля)

Направление подготовки
01.04.02 Прикладная математика и информатика
(шифр, название направления)
Направленность (профиль) программы:
Математическое и компьютерное моделирование в экономике и управлении

Квалификация выпускника
магистр

Форма обучения
Очная

Год начала подготовки - **2025**

Карачаевск, 2025

КОМПЕТЕНЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ»

Код компе-тенций	Содержание компетенции в соответствии с ФГОС ВО/ОПВО	Индикаторы достижения сформированности компетенций
УК-1	Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1. Знает проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними и принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2. Умеет определять пробелы в информации, необходимой для решения проблемной ситуации, и проектирует процессы по их устранению УК-1.3. Владеет инструментами критического анализа надежности источников информации, практического опыта работы с ними, научного поиска
ОПК-1	Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1. Знает методы сбора, систематизации и анализа информации из различных источников по профессиональной тематике для решения актуальных задач фундаментальной и прикладной математики ОПК-1.2. Умеет проводить всесторонний анализ результатов научных и иных исследований по фундаментальной и прикладной математике и применять их для решения задач развития областей профессиональной деятельности ОПК-1.3. Владеет способностью к аргументированному обоснованию выбора метода решения актуальных задач фундаментальной и прикладной математики в областях профессиональной деятельности

ТЕСТОВЫЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ИНДИКАТОРОВ ОЦЕНИВАНИЯ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

№	Правильный	Содержание вопроса	Компе

зада ния	ответ		тенция
ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА НА ДОПОЛНЕНИЕ			
1		**Прочитайте текст и запишите правильный ответ.** В изучении точностных характеристик регуляризирующих алгоритмов рассматривается скалярная величина $U_b(\alpha)$ характеризующая ……………………….. регуляризирующего алгоритма	УК-1
2		**Прочитайте текст и запишите правильный ответ.** Нормальным решением вырожденной системы называется вектор φ_H, имеющий ……………………….. среди всех решений системы $A\varphi = f$	УК-1
3		**Прочитайте текст и запишите правильный ответ.** Функционал $\Gamma(\mu)$ содержит два параметра γ_1, γ_2. От значений этих параметров зависит точность ………………………..	ОПК-1
4		**Прочитайте текст и запишите правильный ответ.** Для функции *svds*, обращение имеет вид *svds(K)*. Он вычисляет вектор размерности *M*, состоящий из сингулярных чисел λ_j матрицы *K*, которые расположены в ………………………..	ОПК-1
ЗАДАНИЯ ОТКРЫТОГО ТИПА СВОБОДНОГО ИЗЛОЖЕНИЯ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ			
5		**Прочитайте текст и запишите развернутый ответ.** Задача решения операторного уравнения $Af = \varphi$ называется корректно поставленной, если для каждой правой части $f \in X$ решение φ обладает следующими свойствами. Перечислите их.	УК-1
6		**Прочитайте текст и запишите развернутый ответ.** В матричном виде модель наблюдений имеет вид: $\tilde{y} = X\beta + \varepsilon$. Построение оценок для коэффициентов β регрессионной модели сводится к решению указанной системы уравнений. Какие условия налагаются на систему и указать корректность (некорректность) задачи. Дать развернутый ответ.	ОПК-1
7		**Прочитайте текст и запишите развернутый ответ.** Число обусловленности $cond(A)$ является важной характеристикой матрицы А. Величина числа обусловленности $cond(A)$ дает классификацию матриц (систем). Опишите эту классификацию.	УК-1
8		**Прочитайте текст и запишите развернутый ответ.** Чем вызвана необходимость использования дескриптивной регуляризации.	ОПК-1
ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА НА УСТАНОВЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ			

9		**Прочитайте текст и установите последовательность.** Относительно модели наблюдений в матричном виде $\tilde{y} = X\beta + \varepsilon$ делают следующие предположения, называемые также условиями Гаусса – Маркова: 1. Матрица ковариации $V_\varepsilon = M\left[\varepsilon\varepsilon^T\right] = \sigma^2 I$ размера $n \times n$; I – единичная матрица размера $n \times n$. 2. Случайный вектор ε подчиняется n - мерному нормальному распределению. 3. Матрица X – неслучайная матрица, а ε – случайный вектор. 4. Ранг *rank (X)* матрицы X удовлетворяет условию: $rank(X) = k + 1 \le n$. 5. Математическое ожидание $M(\varepsilon) = \theta_n$, где θ_n – вектор, n проекций которого равны нулю (т.е. нулевой вектор). **Запишите соответствующую последовательность правильности следования условий в виде цифр слева направо**	УК-1
10		**Прочитайте текст и установите последовательность.** Вектор дескриптивного решения находится по формуле $\varphi_\alpha^* = V_p x_\alpha^*$. Тогда, построение дескриптивного решения можно представить следующими шагами: 1. Вычисление вектора x_α из условия минимума функционала 2. Выполнение сингулярного разложения 3. Решение вариационной задачи 4. Формирование вектора x_α^* 5. Вычисление вектора дескриптивного решения **Запишите соответствующую последовательность правильности следования условий в виде цифр слева направо**	ОПК-1
11		**Прочитайте текст и установите последовательность.** Число обусловленности $cond K$ является важной характеристикой матрицы *K*. Основные свойства числа обусловленности вполне очевидны и ими являются приведенные ниже свойства. Расположите их по следующему критерию - от простого к сложному. 1. $cond(K) = cond(K^{-1})$. 2. $cond(K) = \frac{\max_i \lvert k_{ii} \rvert}{\min_i \lvert k_{ii} \rvert}$; где k_{ii} – диагональные элементы матрицы K . 3. $cond K \ge 1$, $cond I = 1$, где I – единичная матрица. 4. для евклидовой и спектральной норм число обусловленности не меняется от умножения матрицы K слева и справа на любые ортогональные матрицы. 5. $cond(cK) = cond(K)$, где $c \ne 0$ – константа. **Запишите соответствующую последовательность правильности**	УК-1

		следования условий в виде цифр слева направо	
12		**Прочитайте текст и установите последовательность.** Байесовский подход к построению регуляризирующих алгоритмов обладает исходной информацией необходимой для построения алгоритма и точности такого алгоритма. Исходной информацией при этом являются: 1. Функция потерь $\Pi\left(\varphi_T, \overline{\varphi}\right)$, представимая в квадратичной форме. 2. Условное распределение $p\left(f \mid \overline{\varphi}\right)$, характеризующее распределение вектора измерений при фиксированном векторе $\overline{\varphi}$. 3. Априорное распределение $p\left(\overline{\varphi}\right)$ искомого вектора решения $\overline{\varphi}$. **Запишите соответствующую последовательность правильности следования условий в виде цифр слева направо**	ОПК-1
13		**Прочитайте текст и установите последовательность.** Построение дескриптивного локального регуляризированного решения φ_S^*, удовлетворяющего ограничениям $G\varphi \le g$, можно представить следующими этапами: 1. Проверяются ограничения $GV_p x_S \le g$ 2. Если ограничения нарушаются, то находится решение μ^* двойственной задачи и вычисляется вектор x_S^* 3. Если эти ограничения выполняются, то $x_S^* = x_S$. 4. Вычисляется вектор x_S локального регуляризированного решения удовлетворяющий определенным ограничениям 5. Строится вектор решения φ_S^* **Запишите соответствующую последовательность правильности следования условий в виде цифр слева направо**	ОПК-1
14		**Прочитайте текст и установите последовательность.** Задача решения операторного уравнения $A\varphi = f$, называется корректно поставленной по Тихонову, если выполнены следующие условия: 1. Решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству Ω_A пространства решений Ω, т.е. $\varphi \in \Omega_A \subset \Omega$. 2. Решение единственно на множестве Ω_A, т.е. для любой правой части $f \in \Phi_A$ существует единственный элемент $\varphi \in \Omega_A$. 3. Если вариации правой части не выводят ее за пределы множества Φ_A (следовательно, соответствующие φ принадлежат Ω_A), то существует непрерывная зависимость решения от правой части и обратный оператор A^{-1}. **Запишите соответствующую последовательность правильности**	УК-1

		следования условий в виде цифр слева направо	
ЗАДАНИЯ ЗАКРЫТОГО ТИПА НА УСТАНОВЛЕНИЕ СООТВЕТСТВИЯ			
15		**Прочитайте текст и установите соответствие.** Установите соответствие между вариационными задачами синтеза регуляризирующего алгоритма и их решениями, путем подбора к каждой позиции данной в левом столбце, соответствующей позиции из правого столбца.	УК-1

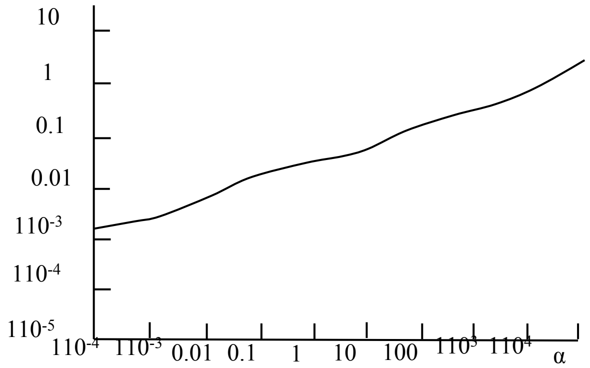
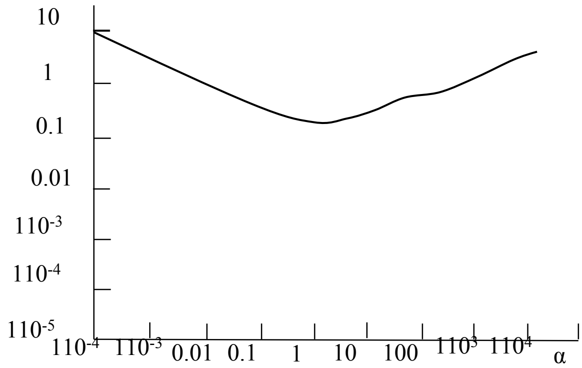
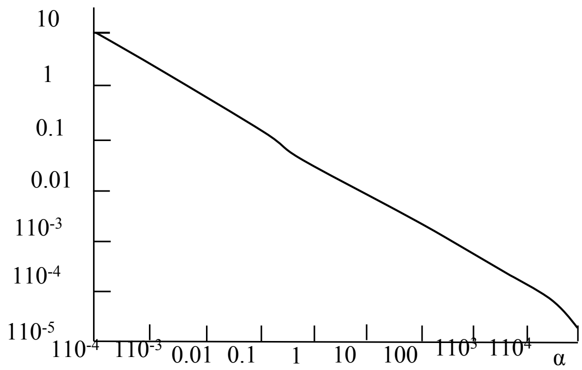
А	$\min\limits_{\alpha>0} U_b(\alpha),\ при \quad U_\xi(\alpha) \le U_\xi^{\max}$	1	Решение задачи минимизирует систематическую ошибку при гарантированной устойчивости решения к шуму измерения
Б	$\min\limits_{\alpha>0}\left[U_b(\alpha)\cdot B_{\max}^2 + U_\xi(\alpha)\cdot\sigma_{\max}^2\right]$	2	Решение задачи минимизирует норму случайной ошибки решения при требуемой разрешающей способности алгоритма
В	$\min\limits_{\alpha>0} U_\xi(\alpha),\ при \quad U_b(\alpha) \le U_b^{\max}$	3	Решение задачи является оценкой оптимального параметра регуляризации для классов решений и погрешностей

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В

16		**Прочитайте текст и установите соответствие.** Основное противоречие регуляризирующих алгоритмов состоит в следующем: при уменьшении параметра регуляризации α систематическая ошибка b_α уменьшается, но увеличивается случайная ошибка ξ_α . При увеличении α происходит обратное. Следовательно, существует такое значение α_{opt} (оптимальный параметр регуляризации), при котором $\Delta(\alpha)$ достигает минимального значения. Для графической иллюстрации этого противоречия приведены графики зависимостей в виде кривых от параметра регуляризации α . Регуляризированное решение строилось для СЛАУ, матрица которой имеет размеры 100×30 и число обусловленности $3\cdot10^{10}$, а дисперсия погрешностей задания правой части соответствует относительному уровню шума $\dfrac{\left(M\left[\lVert\xi_\alpha\rVert^2\right]\right)^{1/2}}{\lVert f\rVert} = 0.05$.	ОПК-1

Установите соответствие путем подбора к каждой позиции данной в левом столбце, соответствующей позиции из правого столбца.

<table>
<tr><td>А</td><td>
</td><td>1</td><td>$\frac{M\left[\|\xi_\alpha\|^2\right]}{\|\varphi\|^2}$</td></tr>
<tr><td>Б</td><td>
</td><td>2</td><td>$\frac{\|b_\alpha\|^2}{\|\varphi\|^2}$</td></tr>
<tr><td>В</td><td>
</td><td>3</td><td>$\frac{\Delta(\alpha)}{\|\varphi\|^2}$</td></tr>
</table>

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В

17

Прочитайте текст и установите соответствие.

ОПК-1

Рассмотрим решение плохо обусловленной СЛАУ. Пусть дана система из двух уравнений $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 10^{-5}\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\\ 10^{-5}\end{vmatrix}$. В решении приведенной задачи присутствуют такие характеристики:

1. Решение системы являющееся вектором.
2. Значение шума.
3. Евклидова норма определяющая близость векторов.
4. Решение, найденное по вектору.
5. Точное решение.

Установите соответствие между указанными характеристиками и их математическими выражениями, путем подбора к каждой позиции данной в левом столбце, соответствующей позиции из правого столбца.

А	Решение, системы являющееся вектором	1	$\tilde{\varphi} = \lvert 1.01, -999 \rvert^T$
Б	Значение шума	2	$\lVert \tilde{\varphi} - \bar{\varphi} \rVert = \left(\sum_{i-1}^{2} (\bar{\varphi}_i - \tilde{\varphi}_i)^2 \right)^{1/2} = 1000$
В	Евклидова норма, определяющая близость векторов	3	$\lVert \tilde{f} - \bar{f} \rVert = \left(\sum_{i-1}^{2} (\bar{f}_i - \tilde{f}_i)^2 \right)^{1/2} = 0.014$
Г	Решение, найденное по вектору	4	$\bar{\varphi} = \lvert 1,1 \rvert^T$; T - символ транспонирования
Д	Точное решение	5	$\eta = \lvert 0.01, -0.01 \rvert^T$

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В	Г	Д

18

Прочитайте текст и установите соответствие.

УК-1

Для евклидовой нормы вектора существует несколько согласованных норм матриц.
Установите соответствие между данными нормами и их формулами, путем подбора к каждой позиции данной в левом столбце, соответствующей позиции из правого столбца.

А	Евклидова норма	1	$\lVert A \rVert = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$
Б	Спектральная норма	2	$\lVert A \rVert = \mu_{\max}^{1/2}$; μ - максимальное собственное число

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б

19

Прочитайте текст и установите соответствие.

УК-1

В байесовском подходе к построению регуляризирующих алгоритмов уделяется внимание априорной информации, необходимой для построения алгоритма и точности такого алгоритма. Исходной информацией при этом являются распределения с их смысловыми характеристиками.

Установите соответствие между указанными распределениями и их характеристиками, путем подбора к каждой позиции данной в левом столбце, соответствующей позиции из правого столбца.

А	$\Pi(\varphi_T, \bar{\varphi})$	1	Априорное распределение искомого вектора решения $\bar{\varphi}$
Б	$p\left(f \mid \bar{\varphi}\right)$	2	Условное распределение, характеризующее распределение вектора измерений при фиксированном векторе $\bar{\varphi}$
В	$p(\bar{\varphi})$	3	Функция потерь, представимая в квадратичной форме

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В

20

Прочитайте текст и установите соответствие.

ОПК-1

В функционале $F_Б[\varphi] = \left\|\tilde{f} - A\varphi\right\|^2_{V_\eta^{-1}} + \left\|\varphi - m_{\bar{\varphi}}\right\|^2_{V_{\bar{\varphi}}^{-1}}$ точка минимума которого является байесовским решением СЛАУ, дана интерпретация

		слагаемых этого функционала. Установите соответствие, путем подбора к каждой позиции данной в левом столбце, соответствующей позиции из правого столбца.	

А	Меньшее значение величины первого слагаемого соответствует	1	большей вероятности события, что вектор φ является выборкой из совокупности векторов, распределенных по нормальному закону
Б	Меньшее значение второго слагаемого соответствует	2	позволяет выделить множество векторов, «гладкость» которых адекватна ковариационной матрице $V_{\overline{\varphi}}$
В	Первое слагаемое функционала	3	большей вероятности события, что зарегистрированный вектор $\widetilde{f}$ соответствует вектору φ
Г	Второе слагаемое функционала	4	позволяет выделить в пространство векторов φ множество векторов, статистических адекватных заданному вектору $\widetilde{f}$

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	**Б**	**В**	**Г**

ЗАДАНИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ТИПА С ВЫБОРОМ ОДНОГО ПРАВИЛЬНОГО ОТВЕТА

21		**Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Какой точкой является глобальное регуляризированное решение φ_α квадратичного функционала. 1. минимума 2. максимума 3. стационарной	УК-1
22		**Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Байесовское регуляризированное решение находится из системы линейных алгебраических уравнений 1. $\left(A^T V_\eta^{-1} A + V_\varphi^{-1}\right)\left(\varphi + \widetilde{f}\right) = A^T V_\eta^{-1} \widetilde{f} + V_\varphi^{-1}$	ОПК-1

		2. $\left(A^T V_\eta^{-1} A + V_\varphi^{-1}\right)\tilde{f} = A^T V_\eta^{-1}\tilde{f} + V_\varphi^{-1} m_\varphi$ 3. $\left(A^T V_\eta^{-1} A + V_\varphi^{-1}\right)\varphi = A^T V_\eta^{-1}\tilde{f} + V_\varphi^{-1} m_\varphi$	
23		**Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** К недостаткам байесовского подхода к построению регуляризированного решения СЛАУ следует отнести: 1. допущение об описательной природе искомого решения 2. допущение о случайной природе искомого решения 3. допущение о детерминированной природе искомого решения 4. допущение о статистической природе искомого решения	УК-1
24		**Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Матрица B называется ортогональной, если имеет место тождество 1. $B^T - B = B - B^T = I$ 2. $B^T B = BB^T = I$ 3. $B^T B = BB^T = 0$ 4. $B^T B^{-1} = B^{-1} B^T = I$	ОПК-1
25		**Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Точность построенного байесовского регуляризированного решения рассматривается при следующих предположениях: $M[\eta] = 0$; $M[\varphi\eta^T] = 0$. Данное условие означает, что проекция φ_j и η_i 1. не коррелированны между собой 2. достигает минимума 3. убывает по абсолютной величине 4. линейно зависимы между собой	УК-1
26		**Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Минимаксный регуляризирующий алгоритм строится из следующего условия регуляризированного решения на «допустимом» множестве решений Ω . 1. минимума наибольшей ошибки 2. максимума постоянной ошибки	ОПК-1

		3. максимума наименьшей ошибки	
ЗАДАНИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ТИПА С ВЫБОРОМ НЕСКОЛЬКИХ ПРАВИЛЬНЫХ ОТВЕТОВ			
27		**Прочитайте текст и выберите правильные ответы.** Из предложенных вариантов выберите условия невырожденности матрицы *A*. 1. Матрица *A* не вырождена, когда $\det(A) = 0$. 2. Матрица *A* не вырождена тогда и только тогда, когда ее строки линейно зависимы. 3. Матрица *A* не вырождена тогда и только тогда, когда ее строки (столбцы) линейно независимы. 4. Матрица *A* не вырождена, когда $\det(A) \neq 0$.	УК-1
28		**Прочитайте текст и выберите правильные ответы.** В исследовании построения нормального псевдорешения в Mathcad, определена функция *svd*, обращение которой имеет вид $svd(A)$. Она вычисляет матрицу *UV* размером $(N+M)\times M$. Выберите правильные ответы о соответствии первых и последних строк рассматриваемой матрицы. 1. Первые *N* строк этой матрицы соответствуют матрице *U* размером $N \times M$ 2. Первые *N* строк этой матрицы соответствуют матрице *U* размером $N \times N$ 3. Последние *M* строк матрицы *UV* содержат матрицу *V* размером $M \times M$ 4. Последние *M* строк матрицы *UV* содержат матрицу *V* размером $(M - N)\times M$	ОПК-1
29		**Прочитайте текст и выберите правильные ответы.** Вариационные задачи синтеза регуляризирующего алгоритма описываются следующими задачами: Задача A: $\min\limits_{\alpha>0} U_b(\alpha)\, npu\, U_\xi(\alpha) \leq U_\xi^{\max}$. Задача B: $\min\limits_{\alpha>0} U_\xi(\alpha)\, npu\, U_b(\alpha) \leq U_b^{\max}$. Выберите из предложенных описание задач A и B. 1. Решение задачи A (величина α_A) минимизирует систематическую ошибку при приближенной вариации решения к шуму измерения. 2. Решение задачи B (величина α_B) минимизирует норму случайной	УК-1

		ошибки решения при требуемой разрешающей способности алгоритма. 3. Решение задачи B (величина α_B) минимизирует норму случайной ошибки решения при приближенной разрешающей способности алгоритма. 4. Решение задачи A (величина α_A) минимизирует систематическую ошибку при гарантированной устойчивости решения к шуму измерения.	
30		**Прочитайте текст и выберите правильные ответы.** При выборе параметра регуляризации на основе критерия оптимальности V_η - ковариационная матрица вектора погрешностей η. Если матрица V_η не вырождена, то имеют место свойства: 1. для значений α_W, математическое ожидание $M[\rho_W(\alpha)] = 0$ 2. для любого $\alpha > 0$ статистика $\rho_W(\alpha)$ есть сумма квадратов N случайных величин 3. для любого $\alpha \geq 0$ статистика $\rho_W(\alpha)$ есть сумма квадратов N случайных величин, являющаяся постоянной величиной 4. для значений α_W, математическое ожидание $M[\rho_W(\alpha)] = N$	ОПК-1
31		**Прочитайте текст и выберите правильные ответы.** Для построения байесовского регуляризирующего алгоритма и точности такого алгоритма, исходной информацией являются: 1. Априорное распределение $p(\overline{\varphi})$ искомого вектора решения $\overline{\varphi}$ 2. Дискретное неравномерное распределение $p(\overline{\varphi})$ искомого вектора решения $\overline{\varphi}$ 3. Условное несовместное распределение $p(\tilde{f}\|\overline{\varphi})$, характеризующее распределение вектора измерений $\tilde{f}$ при фиксированном векторе $\overline{\varphi}$ 4. Условное распределение $p(\tilde{f}\|\overline{\varphi})$, характеризующее распределение вектора измерений $\tilde{f}$ при фиксированном векторе $\overline{\varphi}$	ОПК-1
32		**Прочитайте текст и выберите правильные ответы.** Система алгебраических уравнений называется несовместной, если для заданной правой части не существует вектора φ, обращающего СЛАУ в тождество, т.е. не выполняется первое условие корректной постановки задачи. Несовместность может быть вызвана следующими неточностями: 1. неточностью задания диагональных элементов матрицы системы 2. неточностью задания элементов матрицы системы 3. неточностью задания правой части	УК-1

		4. неточностью задания элементов расширенной матрицы системы	